Ball-auf-Platte-Versuch

Ausgearbeitet von Lutz Mager, 6.4.2016

Bewegungsgleichungen aus Impuls-/Drallsatz

Sollen die Bewegungsgleichungen durch den Impuls-/Drallsatz hergeleitet werden, ist es zweckmäßig neben dem Inertialsystem ein mitbewegtes Bezugssystem zu defininieren und die Scheinkräfte/inneren Kräfte im System heranzuziehen. Hierzu werden, wie in Abbildung 1 skizziert, zwei Koordinatensystem definiert:

1. Ein Intertialsystem $K^{(0)}$ und
2. ein mitrotierendes Bezugsystem $K^{(1)}$.

Die folgenden äußeren und inneren Kräfte treten in den Systemen $K^{(0)}$ und $K^{(1)}$ auf: Gewichtskraft $F_{\mathrm{G}} = mg$, Zentrifugalkraft $F_{\mathrm{Z}} = m x_{\mathrm{B}} \dot{\alpha}^2$, Haftreibungskraft F_{H}, Normalkraft F_{N}, Eulerkraft $F_{\mathrm{E}} = m x_{\mathrm{B}} \ddot{\alpha}$ und Corioliskraft $F_{\mathrm{C}} = 2m \dot{x}_{\mathrm{B}} \dot{\alpha}$.

Impuls- und Drallsatz des aufgeschnittenen Systems, bestehend aus Ball mit der Masse m und der Massenträgheit J_{B} und Wippe mit der Massenträgheit J_{W}, in $K^{(1)}$ und den generalisierten Kooridaten $q = \begin{bmatrix} x_{\mathrm{B}} & \alpha \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$ lauten:

- Ball

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_{\mathrm{B}} &= F_{\mathrm{Z}} - F_{\mathrm{H}} - mg\sin(\alpha) && (1)\\ 0 &= -F_{\mathrm{E}} - F_{\mathrm{C}} - mg\cos(\alpha) + F_{\mathrm{N}} && (2)\\ J_{\mathrm{B}}\ddot{\varphi} &= rF_{\mathrm{H}} && (3) \end{aligned}$$

- Wippe

$$J_{\mathrm{W}}\ddot{\alpha} = F_{\mathrm{N}} x_{\mathrm{B}} + T_{\mathrm{Motor}} \tag{4}$$

Wird angenommen, dass der Ball schlupffrei rollt gilt der kinematische Zusammenhang

$$x_{\mathrm{B}} = r\varphi,\ \dot{x}_{\mathrm{B}} = r\dot{\varphi},\ \text{und}\ \ddot{x}_{\mathrm{B}} = r\ddot{\varphi}. \tag{5}$$

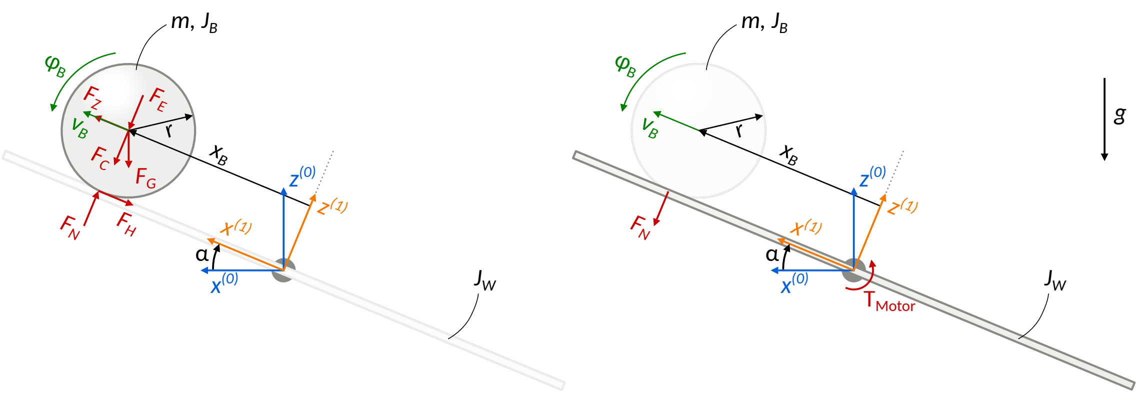

Abbildung 1: Mechanisches Schnittbild des Ball-auf-Wippe-Systems. Links sind die Kräfte eingezeichnet, die auf den Ball und rechts die Kräfte/Momente, die auf die Wippen wirken.

Durch die Gleichungen (5) und (3) kann nun die Haftreibungskraft

$$F_{\mathrm{H}} = \frac{J_{\mathrm{B}}}{r^2} \ddot{x}_{\mathrm{B}} \tag{6}$$

bestimmt werden, und aus Gleichung (2) folgt die Normalkraft

$$F_{\mathrm{N}} = m x_{\mathrm{B}} \ddot{\alpha} + 2m \dot{x}_{\mathrm{B}} \dot{\alpha} + mg \cos(\alpha). \tag{7}$$

Durch einsetzen erhält man schließlich die Bewegungsgleichungen des Systems

$$\left(m + \frac{J_{\mathrm{B}}}{r^2}\right) \ddot{x}_{\mathrm{B}} - m x_{\mathrm{B}} \dot{\alpha}^2 + mg \sin(\alpha) = 0 \tag{8}$$

$$\left(m x_{\mathrm{B}}^2 + J_{\mathrm{W}}\right) \ddot{\alpha} + 2m x_{\mathrm{B}} \dot{x}_{\mathrm{B}} \dot{\alpha} + mg x_{\mathrm{B}} \cos(\alpha) = T_{\mathrm{Motor}}. \tag{9}$$

Hierbei ist zu beachten, dass die Normalkraft nach Gleichung (7) mit negativem Vorzeichen in den Drallsatz der Wippe eingesetzt muss, da F_{N} eine Schnittkraft ist, die am Ball bestimmt wurde.

Bewegungsgleichungen aus Lagrange-Ansatz

Dieselben Bewegungsgleichungen können auch durch den Lagrange-Ansatz bestimmt werden. Hierzu wird die sogenannte Lagrange-Funktion

$$L = T - V \tag{10}$$

aufgestellt. In dieser Gleichung steht T für die kinetische Energie, bestehend aus

$$T_{\mathrm{trans}} = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}_{\mathrm{B}}^2 + x_{\mathrm{B}}^2 \dot{\alpha}^2\right) \tag{11}$$

$$T_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2} J_{\mathrm{B}} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} J_{\mathrm{W}} \dot{\alpha}^2 = \frac{1}{2} J_{\mathrm{B}} \left(\frac{\dot{x}_{\mathrm{B}}}{r}\right)^2 + \frac{1}{2} J_{\mathrm{W}} \dot{\alpha}^2 \tag{12}$$

$$T = T_{\mathrm{trans}} + T_{\mathrm{rot}}, \tag{13}$$

und V für die potentielle Energie, bestehend aus

$$V = mg x_{\mathrm{B}} \sin(\alpha), \tag{14}$$

des System. (Anmerkung: Der Ball dreht sich um seinen eigenen Mittelpunkt und bewegt sich außerdem auf einer Kreisbahn um den Mittelpunkt der Wippe).

Mit denselben generalisierten Koordiaten $q_i,\ i \in \{1, 2\}$ von oben und den generalisierten Kräften $Q_i,\ i \in \{1, 2\}$ erhält man die Bewegungsgleichungen nach Lagrange durch

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i. \tag{15}$$

Das System besitzt eine generalisierte Kraft in der Koordiante $q_2 = \alpha$, das Drehmoment des Motors T_{Motor}.

Die einzelnen Termine werden nun getrennt für beide generalisierten Koordianten bestimmt:

- Erste Koordinate $q_1 = x_\mathrm{b}$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = -mg\sin(\alpha) + mx_\mathrm{B}\dot{\alpha}^2 \tag{16}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \left(m + \frac{J_\mathrm{B}}{r^2}\right)\dot{x}_\mathrm{B} \tag{17}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) = \left(m + \frac{J_\mathrm{B}}{r^2}\right)\ddot{x}_\mathrm{B} \tag{18}$$

$$Q_1 = 0 \tag{19}$$

- Zweite Koordinate $q_2 = \alpha$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = -mgx_\mathrm{B}\cos(\alpha) \tag{20}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = 2mx_\mathrm{B}^2\dot{\alpha} + J_\mathrm{W}\dot{\alpha} \tag{21}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) = 2mx_\mathrm{B}\dot{x}_\mathrm{B}\dot{\alpha} + \left(mx_\mathrm{B}^2 + J_\mathrm{W}\right)\ddot{\alpha} \tag{22}$$

$$Q_2 = T_\mathrm{Motor} \tag{23}$$

Durch einsetzen in den Ansatz (15) erhält man schließlich die Bewegungsgleichungen des Systems

$$\left(m + \frac{J_\mathrm{B}}{r^2}\right)\ddot{x}_\mathrm{B} - mx_\mathrm{B}\dot{\alpha}^2 + mg\sin(\alpha) = 0 \tag{24}$$

$$\left(mx_\mathrm{B}^2 + J_\mathrm{W}\right)\ddot{\alpha} + 2mx_\mathrm{B}\dot{x}_\mathrm{B}\dot{\alpha} + mgx_\mathrm{B}\cos(\alpha) = T_\mathrm{Motor}. \tag{25}$$